Super Arbeit ☺ Wunderbare Formulierungen / Kommentare 6

BLATT 1.

# BABYLONISCHE TONTAFEL UND DER ZAHLENSTRAHL

## Babylonische Tontafel

Die Zahlen sind immer im 60-er Schritt. Nicht wie bei unserem 10-er System:

| | Hunderter | Zehner | Einer | |
|---|---|---|---|---|
| 10er System | 1 <br> $\cdot 10^2$ <br> 100 + | 3 <br> $\cdot 10^1$ <br> 30 + | 9 <br> $\cdot 10^0$ <br> 9 | ⇨ 139 <br> → jede nächste Stelle hat eine 10-er Potenz mehr. |
| 60er System | 1 <br> $\cdot 60^0$ | 24 <br> $\cdot 60^{-1}$ | 51 <br> $\cdot 60^{-2}$ | 10 <br> $\cdot 60^{-3}$ |

In Babylon war der Satz des Pythagoras bereits bekannt, es gab jedoch noch keine Dezimalpunkte

Tontafel: Kontext der Tontafel: Quadrat (siehe Bild ) hat eine Länge von 30.
1 Pfeil (wissen wir heute) ist nämlich = 10. → Diagonale ist ein bisschen länger als 30 (ist so bei einem Quadrat.

## UMRECHNUNG

$1 + 24 \cdot \frac{1}{60^1} + 51 \cdot \frac{1}{60^2} + 10 \cdot \frac{1}{60^3}$ | TR

$= 1.414212963$

$\sqrt{2} = 1.41421356 2$

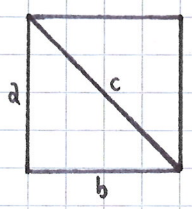
Zahlen siehe oben: 60er System

$\frac{1}{60^1}$ ist dasselbe wie $60^{-1}$!

→ erstaunlich ist jetzt, dass fast alle Zahlen (vom Resultat) mit der Wurzel von 2 übereinstimmen!

⟶ Jetzt betrachten wir das Quadrat mal genauer:

Sabrina Elmer

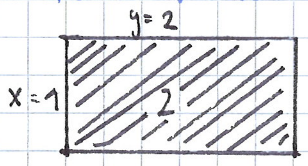



→ Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$ $|\sqrt{\ }$ → Diagonale ist $\sqrt{2}$

Wie konnten sie ohne Taschenrechner $\sqrt{2}$ so genau definieren?

Überlegungen: Sie wissen, dass die $\sqrt{\ }$ von 2 zwischen 1 und 4 sein muss:
$1^2 = 1$ ; $2^2 = 4$ Jetzt auspropieren bis man auf $\sqrt{2}$ käme → ginge ewig!! 1. Idee
z.B. $1.5^2 = 2.25$ ↯ $1.4^2 = 1.96$ ↯ ⇒ unvorteilhaftes System!

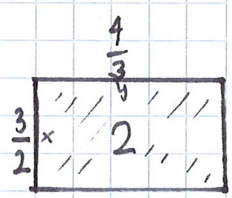
2. Idee: Wir nehmen ein Rechteck. Die Fläche des Rechtecks ist ja Länge · Breite.



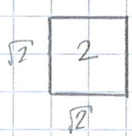

→ damit ich auf ein Quadrat komme: Länge verkürzen, Breite verlängern. Indem ich Länge + Breite addiere, und das Ergebnis dann durch 2 teile. Die Fläche bleibt dabei unverändert. Jetzt habe ich jedoch erst ein Ergebnis, (eine Seite → x). y berechne ich indem ich 2 : das eben erhaltene x dividiere. Weil z.B.: $\underset{x}{\frac{3}{2}} \cdot ? = 2$ (Fläche) → $\frac{4}{3} = y$

Also: $x + y = \ldots \;|:2$ (Fläche) $=$ neues $x$

$1 + 2 = 3 \;|:2 = \frac{3}{2}$, das ist jetzt aber erst eine Seite.

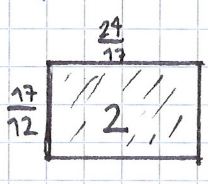



↳ andere Seite berechnen: $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$




⇒ Jetzt immer so weiter, bis ich schlussendlich auf $\sqrt{2}$ komme:

$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{17}{6} \;|:2 = \frac{17}{12}$



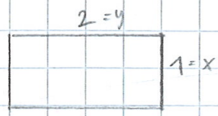

$2 : \frac{17}{12} = \frac{24}{17}$

→ noch nicht $\sqrt{2}$ → wir müssen noch weiter rechnen. Aber jetzt stellen wir das ganze in einer Tabelle dar. (siehe Blatt 2)

# BLATT 2

Babylonische Tontafel und der Zahlenstrahl

| Schritt i (Index) | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | |
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25$ (Blatt 1 hinten ausgerechnet) |
| 2 | $\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) : 2 = \frac{17}{12}$ | $2 : \frac{17}{12} = \frac{24}{17}$ | $2.0069\overline{4}$ (→ einfach $\left(\frac{17}{12}\right)^2$) |
| 3 | $\boxed{\frac{577}{408}}$ | $\frac{816}{577}$ | $2.000006007$ |
| 4 | $\frac{665857}{470832}$ | $\frac{941664}{665857}$ | = Fläche 2<br>2 (jedoch auch nicht genau, weil TR zeigt uns nicht alle Ziffern) |




Lösungsweg siehe unten

→ 1.41421|56... = $x_i$ → noch kein Quadrat

→ 1.41421|143... = $y_i$ ↗

Quadrat hat ja x & y gleiche Länge

$\sqrt{2}$ → 1.41421|3562 (siehe 1. Blatt vorne) ← $\sqrt{2}$

**zu Schritt 3:**

$$\frac{17}{12} + \frac{24}{17} = \frac{577}{204} \quad | :2 \quad = \frac{577}{408} = x_i$$

↳ jetzt noch $y_i$ ausrechnen:

$$\frac{577}{408} \cdot ? = 2 \Rightarrow 2 : \frac{577}{408} = \frac{816}{577}$$

Erkenntnis (nicht relevant, aber trotzdem spannend): Nenner von $x_i$ $\cdot 2$ = Zähler von $y_i$!

$\left(\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}\right)$ und: Zähler von $x_i$ = Nenner von $y_i$!

Jetzt gehen wir einen Schritt weiter:

Frage: Können wir Wurzel 2 überhaupt als Bruch genau haben? Antwort: Nein!

Aufgabe: Wie können wir das beweisen? (siehe hinten, "Indirekter Beweis")

## Der Zahlenstrahl

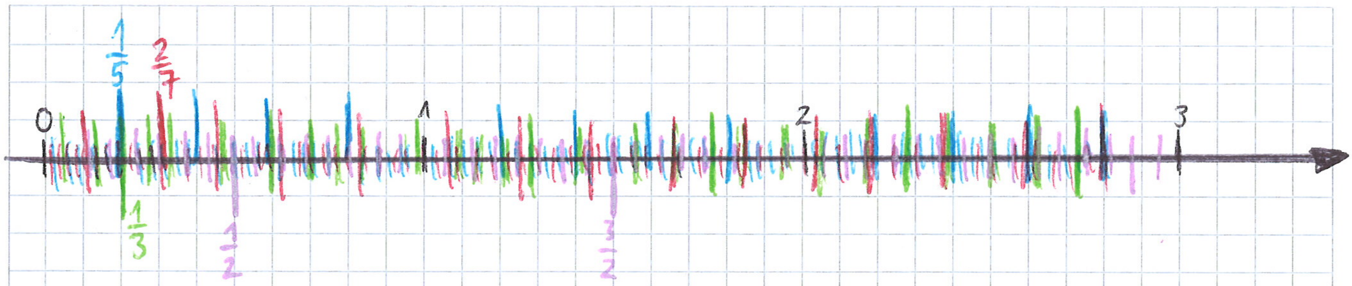
1. Teil (Blatt 3, vorne: 2. Teil)

Brüche einzeichnen auf einem Zahlenstrahl

Frage: Kann man alle Brüche auf einem Zahlenstrahl einzeichnen (2tel, 3tel, Primzahlen..)? ⇒ Nein! Das geht nicht. Wurzel 2 passt nicht in den Zahlenstrahl (Griechen, die versuchten zu beweisen dass $\sqrt{2}$ ein Bruch sein kann verzweifelten)

⇒ Wurzel 2 kann kein Bruch sein

Sabrina Elmer Zg




Wir beginnen, alles durch 2 zu teilen: halbieren, halbieren, halbieren – 2tel
Danach arbeiten wir mit 3teln: Immer wieder dritteln, dritteln, dritteln – 3tel
Jetzt: Primzahlen ⇒ wir arbeiten mit 5tel, 7tel

Trotz diesen unglaublich vielen Brüchen, kann nicht jede Zahl in einen Bruch umgewandelt werden ("verdammte Wurzel"), z.B. $\sqrt{2}$
Zusatz: Pythagoraer sagten: „Alles ist Zahl."

# INDIREKTER BEWEIS

Man nimmt an, das Gegenteil wäre richtig, man stellt sich die Frage: Wie kann ich beweisen, dass etwas <u>nicht</u> stimmt? Man beweist es also mit einem Wiederspruch.
Ist $\sqrt{2}$ ein Bruch? (Wir wissen dass es keiner ist, und beweisen das nun mit einem indirekten Beweis.
Es gibt nur 2 Möglichkeiten: Entweder ist es ein Bruch, oder es ist kein Bruch. Wenn also das Ergebnis der Annahme ($\sqrt{2} = \frac{p}{q}$) zeigt, dass unsere Annahme nicht stimmt, <u>muss</u> es der Fall sein, dass es keinen Bruch für $\sqrt{2}$ gibt.

<u>Annahme</u>: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$
"Wurzel 2 ist ein Bruch"

Bedingungen: $p, q$ sind natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$
$\frac{p}{q}$ ist ein bereits vollständig gekürzter Bruch (!), das heisst $p, q$ sind

# BLATT 3 — Indirekter Beweis

teilerfremd (d.h. man kann es nicht weiter teilen. $\frac{34}{24} \begin{matrix}:2\\:2\end{matrix} = \frac{17}{12} \Rightarrow$ nicht teilerfremd. $\frac{17}{12} = \frac{17}{12} \Rightarrow$ teilerfremd)

Ziel: Wir versuchen die Annahme zu einem Widerspruch zu bringen.

**Beweis**

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad | \; ()^2 \text{ quadrieren}$$
$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$$
$$2 \cdot q^2 = p^2 \quad | \; p := 2 \cdot m$$
$$2 \cdot q^2 = (2 \cdot m)^2 \quad | \text{ Klammer ausrechnen}$$
$$2 \cdot q^2 = 4 \cdot m^2 \quad | :2$$
$$q^2 = 2 \cdot m^2 \quad | \text{ Folgerung}$$

⇨ Was können wir über p und q aussagen?
$p^2$ muss eine Gerade Zahl sein
Grund: 2 mal "etwas" (q) gibt immer eine gerade Zahl ($p^2$). Beispiel: $2 \cdot 7 = 14$
$2 \cdot 8 = 16$

⇨ p muss auch eine gerade Zahl sein. Grund:
Wir wissen jetzt, dass $p^2$ gerade ist, dann muss p auch gerade sein: $7 \cdot 7$ (ungerade) → 49 (ungerade)
$8^2 = 8 \cdot 8$ (gerade) → 64 (gerade)
$5^2 = 5 \cdot 5$ (ungerade) → 25 (ungerade)
→ Wenn $p^2$ gerade ist, muss p auch gerade sein.

⇨ Das Kennzeichen einer geraden Zahl ist, dass der Faktor 2 drinsteckt: $20 = 2 \cdot 10$
$10 = 2 \cdot 5$
ungerade: $15 = 3 \cdot 5$ (kein Faktor "2")

→ Ich setze $p = 2 \cdot m$ $\quad p := 2 \cdot m$ ("setze"; m: beliebige Zahl)

⇨ $q^2$ muss gerade sein → q muss auch wieder gerade sein (siehe ...)
2 mal "etwas" ($m^2$) gibt immer eine gerade Zahl ($q^2$)

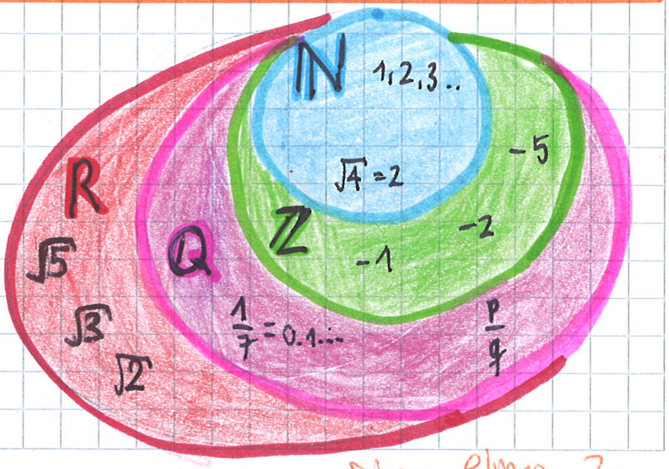
**Schlussfolgerung**

Wenn p und q gerade Zahlen wären, müssten sie durch 2 teilbar / kürzbar sein.
→ Widerspruch zur Annahme, weil unsere Bedingung war, dass p & q fertig gekürzt sind und teilerfremd.
Samit ist die Annahme falsch, und das Gegenteil gilt!! d.h: $\sqrt{2}$ ist kein Bruch!!

Wir gehen nochmal zurück zum Zahlenstrahl, um die Zahlen genauer zu betrachten:

## Der Zahlenstrahl 2. Teil (siehe Blatt 2)

$\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$ = negative Zahlen
$\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen, gebrochene Zahlen
$\mathbb{R}$ = irrationale Zahlen → keine Brüche möglich!




Sabrina Elmer 2g

Menge der Zahlen im $\mathbb{N}$-Bereich: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... ⇨ unendlich, aber abzählbar viele

im $\mathbb{Z}$-Bereich 0, 1 ↘ -1 ↗ 2 ↘ -2 ↗ 3 ↘ -3 ↗ 4 ↘ -4 ↗ 5 ↘ -5

3tes Element 9tes Element

↳ es scheint als wären jetzt doppelt so viele wie bei $\mathbb{N}$ vorhanden. ⇨ ebenfalls noch abzählbar

im $\mathbb{Q}$-Bereich

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ ... |
| $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | ... |
| $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | ... |
| $\frac{4}{1}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{4}$ | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |

⇨ alle Brüche sind abzählbar, unendlich

im $\mathbb{R}$-Bereich: Cantorscher Widerspruchsbeweis, dass $\mathbb{R}$ nicht mehr abzählbar ist.

<u>Annahme</u>: $\mathbb{R}$ ist Intervall $[0, 1]$ (d.h. <u>alles</u> (!) zwischen 0 und 1) ist aufgelistet.

Liste
0.3451238...
0.46878901...
0.56189321...
0.12121212...
0.33213215...
⋮

Annahme: alle sind zählbar

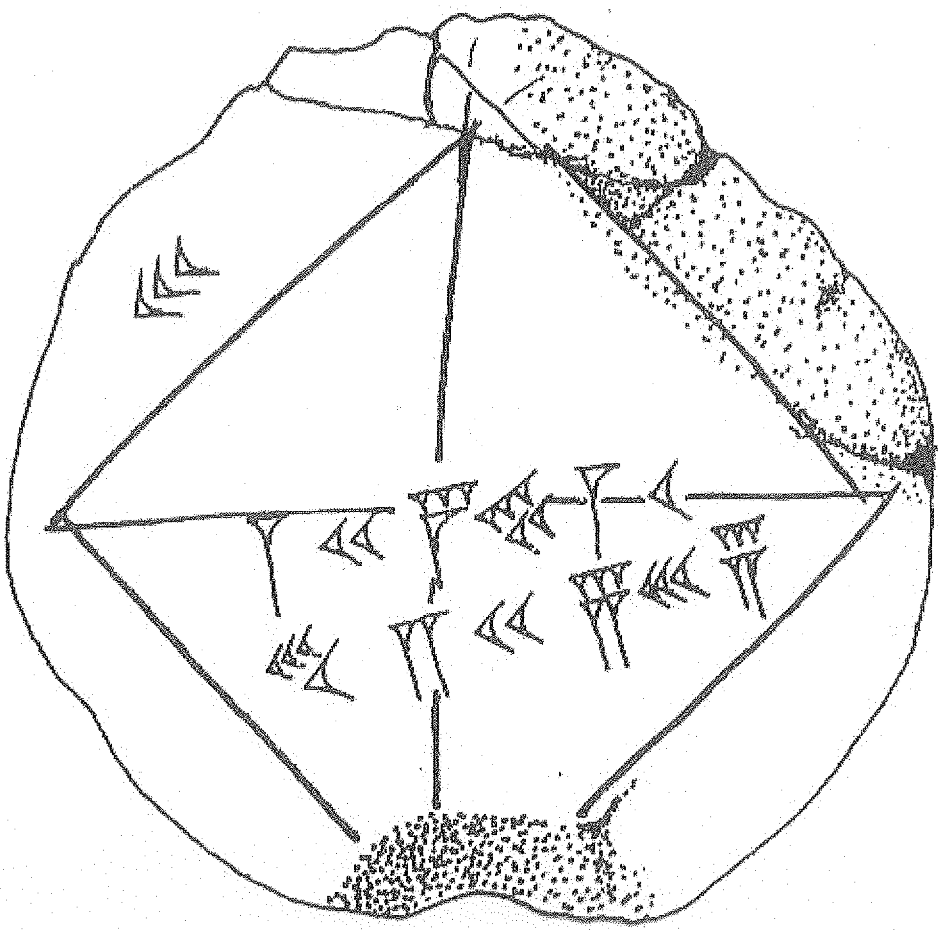
<u>Beweis</u>: Wir bilden eine neue Zahl, die noch nicht in der Liste gewesen ist, und zwar so: neue Zahl 0.47234... → Die Zahl ist ganz sicher anders als die Zahlen in der Liste, weil die erste, zweite, dritte.. Ziffer anders ist ⇨ überabzählbar.

Auf unserem Zahlenstrahl (Blatt 2, hinten) haben wir alle Brüche eingetragen, das heisst es hat nur ganz minime Abstände, es gibt aber trotzdem Lücken. Weil wir wissen ja jetzt, dass es Zahlen gibt, die nicht in einen Bruch umgewandelt werden können (Bsp. $\sqrt{2}$ → irrationale Zahlen), diese Zahlen füllen dann die Lücke.

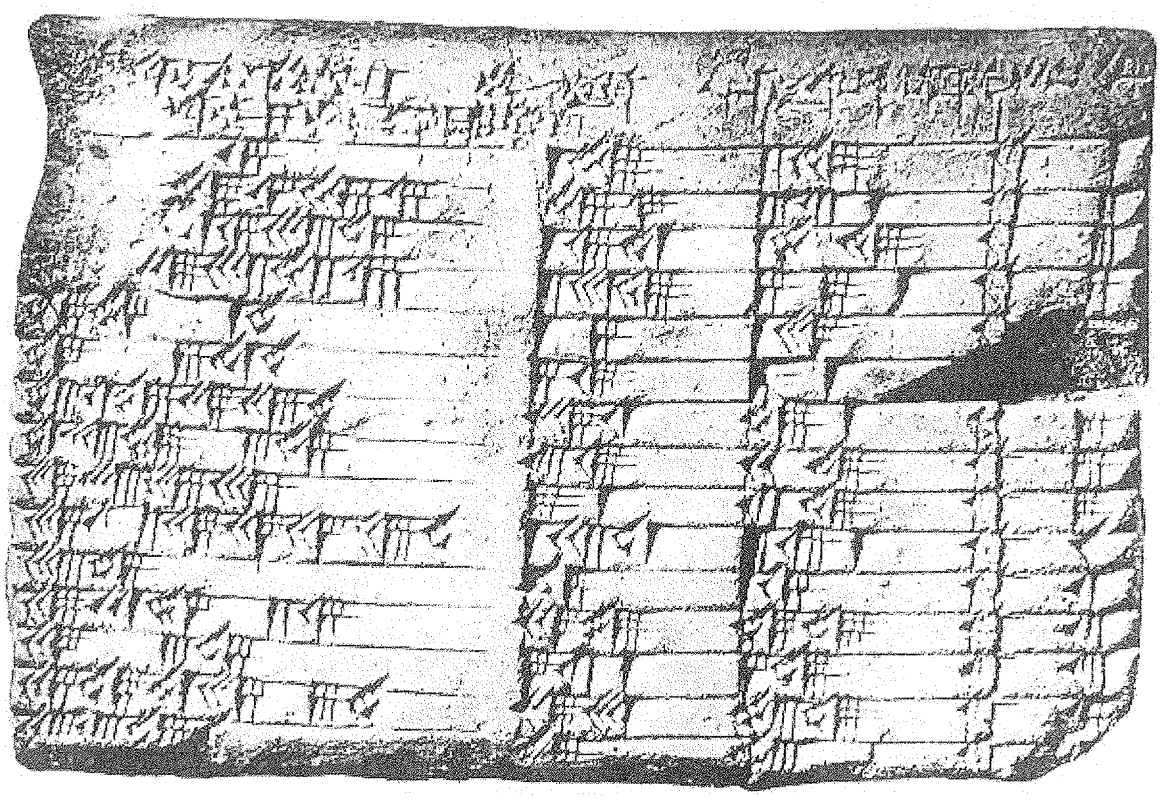
## UNTERSCHIED: DIREKTER & INDIREKTER BEWEIS

Bei einem direkten Beweis haben wir eine Annahme (bei der wir wissen, das sie stimmt) und versuchen diese dann auf verschiedenen Wegen zu beweisen.

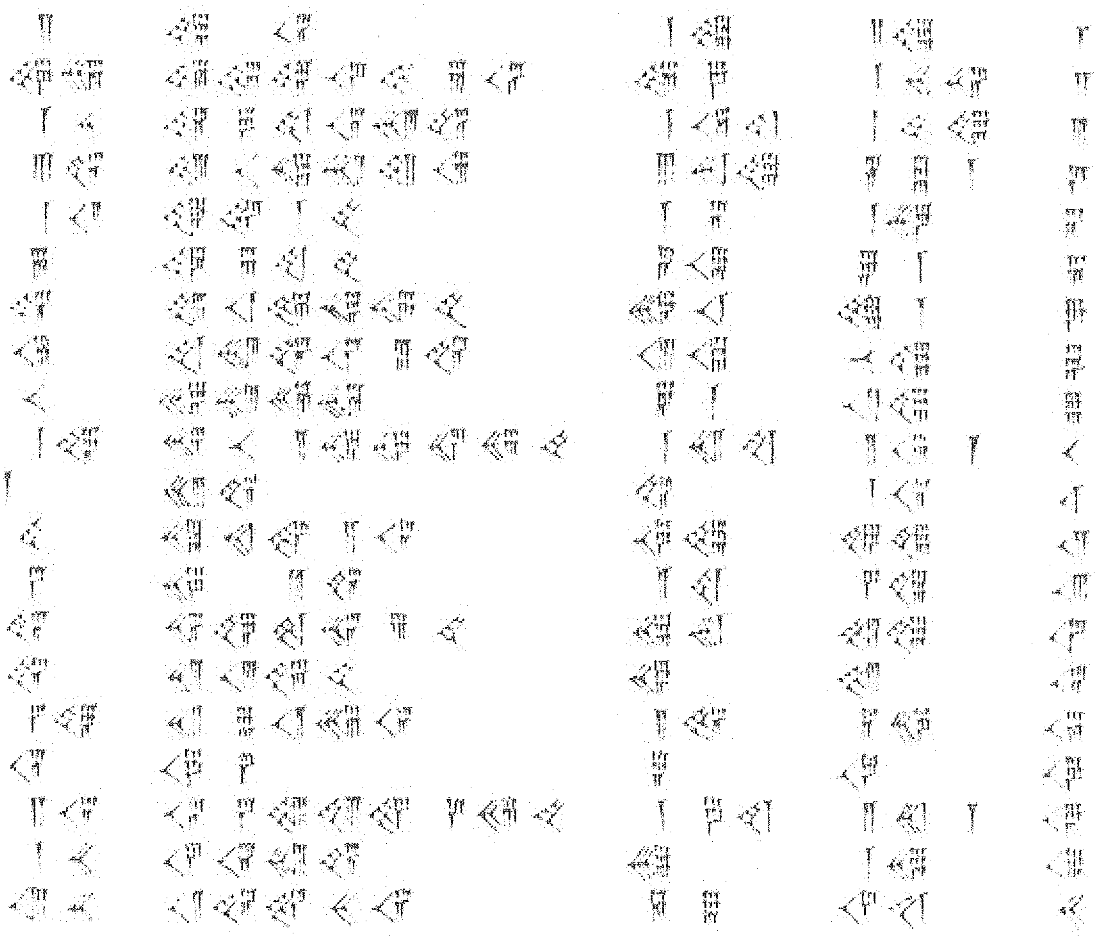
(indirekter Beweis: siehe Einleitung vom "Indirekter Beweis" Blatt 2, hinten)



Eine babylonische Tontafel mit Zahlen (Plimpton 322):



Die Tafel rekonstruiert und vervollständigt:



# $\sqrt{3}$

Aufgabe: Beweise dass $\sqrt{3}$ irrational* ist!

**Annahme** $\sqrt{3} = p/q \quad | ()^2 \quad | p \,\&\, q$ sind teiler fremd

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$3 \cdot q^2 = p^2$$

| 3 mal irgendetwas ($q^2$) $= p^2$
→ $p^2$ ist durch 3 teilbar
→ $p$ ist auch durch 3 teilbar
Da 3 eine Primzahl ist, muss schon ein Primteiler in p vorhanden sein
→ $p = 3 \cdot m$

$$3 \cdot q^2 = (3 \cdot m)^2$$

$$3 \cdot q^2 = 9 \cdot m^2 \quad | :3$$

$$q^2 = 3 \cdot m^2$$

→ 3 ist ein Teiler von $q^2$
→ 3 ist somit auch ein Teiler von q

→ p, q durch 3 teilbar → Widerspruch zur Annahme

Somit gilt das Gegenteil: $\sqrt{3}$ ist kein Bruch.

* irrational = d.h. man kann es nicht in einem Bruch schreiben!

# $\sqrt{7}$

Aufgabe: Beweise dass $\sqrt{7}$ irrational ist.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Annahme | $\sqrt{7} = p/q$ | $\vert\,(\ )^2$ | Bedingung: p & q sind teilerfremd. |
| | $7 = \frac{p^2}{q^2}$ | $\vert\cdot q^2$ | |
| | $7\cdot q^2 = p^2$ | | $p^2$ ist durch 7 teilbar |
| | $7\cdot q^2 = (7\cdot m)^2$ | | ↳ somit ist p auch durch 7 teilbar<br>↳ ich setze für $p := 7\cdot m$ |
| | $7\cdot q^2 = 49\cdot m^2$ | $\vert :7$ | |
| | $q^2 = 7\cdot m^2$ | | → auch $q^2$ ist durch 7 teilbar<br>↳ q ist durch 7 teilbar |

↳ p & q sind weiter teilbar → Widerspruch zur Annahme ("p & q sind teilerfremd")

→ Gegenteil gilt ⇒ $\sqrt{7}$ ist kein Bruch!

Sehr gut ☺

# $\sqrt{9}$

Aufgabe: Beweise dass $\sqrt{9}$ irrational ist

⚠ Tipp: Nicht dasselbe Schema wie mit $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...!

**Annahme:**

$\sqrt{9} = p/q \quad | \; ( \; )^2 \quad | \to p$ & $q$ sind teilerfremd ✓

$9 = \frac{p^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$ ✓

$9 \cdot q^2 = p^2 \quad | \; p^2$ ist durch 9 teilbar ✓ → bis hier stimmt's ✓

✱ ↳ p ist somit auch durch 9 teilbar → dieser Schritt ist FALSCH!

↳ $p = 9 \cdot m$

$9 \cdot q^2 = 81 m^2 \quad | :9$

$q^2 = 9 m^2 \quad | \to q^2$ ist durch 9 teilbar

↳ q ist durch 9 teilbar

⇨ Dieser Beweis ist nicht zum Widerspruch zu führen → $\sqrt{9}$ ist ein Bruch!

✱ Wieso ist dieser Schritt falsch? 9 steckt nicht mehr in z sondern nur noch 3! Erklärung:

Zahl $z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \ldots p_r$ (Primfaktoren)

$z^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdot p_4^2 \ldots p_r^2$

Wenn man z quadriert entstehen alle Primfaktoren doppelt.

$18 = 2 \cdot 9 = \overline{2 \cdot 3 \cdot 3}$ (Primfaktoren)

$18^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$ (Quadratzahlen)

$18^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Jeder Primfaktor muss 2 mal vorkommen (doppelte Primfaktoren)

anderes Bsp: $72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 6 \cdot 6$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6$

$p^2 = 9 \cdot \overset{\downarrow 9}{x} \cdot \overset{\downarrow 9}{x}$

$p^2 = (3 \cdot 3) \cdot x \cdot x$ → durch 9 teilbar

$p^2 = 3^2 \cdot x^2$

$p = 3 \cdot x$ → nicht durch 9 teilbar

Jetzt haben wir viel von Primzahlen gehört. Aber was sind Primzahlen überhaupt?

- Antwort: Zahlen, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind, sind Primzahlen!

Primzahlen sind: 2 (durch 1 & 2 teilbar), 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

4 ist aber keine Primzahl, weil man 4 noch zusätzlich durch 2 teilen kann.

Dasselbe mit 6: Man kann 6 zusätzlich noch durch 2 und 3 teilen → keine Primzahl.